TD 23-24 : Analyse asymptotique

Relations de comparaison (suites)

Exercice 1. Trouver un équivalent simple des suites de termes généraux suivants, puis en déduire les limites éventuellement demandées :

1) $u_n = \dfrac{1}{n-1} - \dfrac{1}{n+1}$ puis $\lim \sqrt{n}u_n$
2) $u_n = \dfrac{n^2+\sqrt{n^5}}{\ln(4n)+e^n}$
3) $u_n = \sqrt{\ln(n+1)-\ln n}$ puis $\lim nu_n$
4) $u_n = \sqrt{n}\sin\left(\dfrac{1}{\sqrt{n+1}}\right)$ puis $\lim u_n$
5) $u_n = \sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}$
6) $u_n = \sqrt{1+\dfrac{1}{\ln(n+1)}}$
7) $u_n = e^{\frac{1}{n}} - e^{\frac{1}{n+1}}$ puis $\lim n^3 u_n$
8) $u_n = \ln\left(\cos\left(\dfrac{1}{n}\right)\right)$ puis $\lim n^2 u_n$
9) $u_n = \sqrt{4+\dfrac{a}{n}}-2$ où $a \in \mathbb{R}^*$

Exercice 2. Déterminer les limites des suites (u_n) suivantes :

$$u_n = n \times \sqrt{\sin\left(\frac{1}{n^2+\ln n}\right)} \qquad v_n = \frac{1-e^{-\frac{1}{n}}}{\sqrt{1-\cos(e^{-\frac{1}{n}})}} \qquad w_n = \left(1+\frac{\alpha}{n}\right)^n \qquad \text{avec } \alpha \in \mathbb{R}^*$$

Exercice 3. Soit (u_n) une suite réelle telle que $u_0 > 0$ et $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = \dfrac{u_n}{1+u_n}$.

En considérant $v_n = \dfrac{1}{u_n}$, montrer que $u_n \sim \dfrac{1}{n}$.

Exercice 4. Comparer à l'aide du symbole o les trois suites de termes généraux suivants :

$$u_n = n^{(\ln n)^2} \qquad v_n = (n^2)^{\ln n} \qquad w_n = (\ln n)^{n \ln n}$$

Exercice 5 (Composition à gauche par l'exponentielle)**.** Soit (u_n) et (v_n) deux suites réelles telles que $u_n \sim v_n$. Montrer que si $u_n - v_n \to 0$, alors $e^{u_n} \sim e^{v_n}$.

Exercice 6 (Composition à gauche par le logarithme)**.** Soit (u_n) et (v_n) deux suites réelles à termes strictement positifs. On suppose $u_n \sim v_n$ et que (u_n) et (v_n) tendent vers une limite (nécessairement commune) $\ell \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$.

1) On suppose $\ell \in]0,1[\cup]1,+\infty[$. Montrer que $\ln u_n \sim \ln v_n$.
2) Montrer que $u_n = v_n + o(u_n)$.
3) En déduire que si $\ell = 0$, alors $\ln u_n \sim \ln v_n$.
4) En utilisant la question précédente, montrer que si $\ell = +\infty$, alors $\ln u_n \sim \ln v_n$.

Note : finalement, si (u_n) tend vers une limite (finie ou non) différente de 1, alors $\ln u_n \sim \ln v_n$.

5) Application : déterminer un équivalent de $u_n = \ln\left(\sin\dfrac{1}{n}\right)$.
6) Soit $u_n = 1+e^{-n}$ et $v_n = 1+e^{-2n}$. Montrer que $u_n \sim v_n$. A-t-on $\ln u_n \sim \ln v_n$?

Exercice 7 ($\star$)**.** Soit (u_n) une suite réelle décroissante telle que $u_n + u_{n+1} \sim \dfrac{1}{n}$.

1) Montrer que (u_n) converge vers 0^+.
2) Donner un équivalent simple de (u_n).

Exercice 8 ($\star$)**.** Montrer que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k! \underset{n\to+\infty}{\sim} n!$.

Relations de comparaison (fonctions)

Exercice 9. Déterminer un équivalent en $+\infty$ de $\dfrac{x^2 - \ln x + 3^x}{x^3 + \sqrt[3]{x}}$.

Exercice 10. Déterminer un équivalent en 0 de $\dfrac{(1-e^x)\sin x}{x^2+x^3}$ et de $\dfrac{(3+x)\sqrt{x+3}}{\sqrt{x}\sin\sqrt{x}}$.

Exercice 11. À l'aide d'un équivalent, déterminer les limites suivantes :

1) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin(2x)}{\tan(3x)}$ 2) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\ln x}{x^x - 1}$ 3) $\displaystyle\lim_{x\to 0} (1+\tan x)^{\frac{1}{\sin x}}$

Calculs de développements limités

Exercice 12. Déterminer les développements limités suivants :

(a) DL_5 en 0 de $\mathrm{sh}x$
(b) DL_7 en 0 de $\mathrm{ch}x$
(c) DL_5 en 0 de $\sqrt[3]{1+x} + \dfrac{1}{1+x}$
(d) DL_4 en 0 de $\dfrac{\sin x}{x}$
(e) DL_2 en 0 de $\dfrac{e^x - \sqrt{1+2x}}{x^2}$
(f) DL_3 en 0 de $\cos(x)\ln(1+x)$
(g) DL_6 en 0 de $(1-\mathrm{ch}(x))\sin x$
(h) DL_3 en 0 de $e^x \arctan x$
(i) DL_3 en 0 de $e^{\sqrt{1+x}}$
(j) DL_8 en 0 de e^{x^2}
(k) DL_4 en 0 de $\ln(\cos x)$
(l) DL_8 en 0 de $\sqrt{1+x^2}\ln(1+x^3)$
(m) DL_4 en 0 de $\dfrac{1}{1+x+x^2}$
(n) DL_3 en 0 de $\mathrm{th}x$
(o) DL_4 en 0 de $\dfrac{x\cos x}{\sin x}$
(p) DL_2 en 0 de $\dfrac{\arctan x}{\tan x}$
(q) DL_5 en 0 de $\arctan x$
(r) DL_5 en 0 de $\arccos x$
(s) DL_5 en 0 de $\displaystyle\int_0^x e^{t^2}\,dt$
(t) DL_4 en 0 de $\sqrt{2+x}$
(u) DL_3 en 0 de $e^{3+\mathrm{ch}x}$
(v) DL_3 en 0 de $\ln\left(1+\sqrt{1+x}\right)$
(w) DL_4 en 0 de $\mathrm{sh}(x-x^2)$
(x) DL_2 en 0 de $(1+x)^{\frac{1}{x}}$
(y) DL_4 en 0 de $\cos(x)^{\sin(x)}$
(z) DL_5 en 0 de $\cos^5 x$

Exercice 13 (DL ailleurs qu'en 0)**.** En posant $y = x-3$, déterminer les DL_3 en 3 de e^x, $\ln x$ et x^α avec $\alpha \in \mathbb{R}$.
De manière similaire, déterminer le DL_3 en 1 de $\dfrac{\ln x}{x^2}$ et le DL_3 en $\dfrac{\pi}{4}$ de $\tan x$.

Exercice 14. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Déterminer, en fonction de α, l'ordre maximal n pour lequel x^α admet un DL_n en 0.

Exercice 15 ($\star$)**.** Montrer que $\dfrac{1}{1+|x|^3}$ admet un DL_2 en 0. En est-il de même pour un DL_3 en 0 ? Un DL_4 en 0 ?

Exercice 16 ($\star$)**.** Déterminer le DL_{100} en 0 de $\ln\left(\sum_{k=0}^{99}\frac{x^k}{k!}\right)$

Applications des développements limités

Exercice 17. Déterminer un équivalent simple des expressions suivantes :

1) $\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2}$ en 0
2) $\tan x-\sin x$ en 0
3) $\ln(\ln(1+x))$ en 0
4) $\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}$ en $+\infty$
5) $\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}$ en $+\infty$
6) $x\ln(x+1)-(x+1)\ln x$ en $+\infty$

Exercice 18. À l'aide d'un DL et/ou d'un équivalent, déterminer les limites suivantes :

1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x+\sin x}{x\ln x}$
2) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)^{\frac{1}{x}}$
3) $\lim\limits_{x\to 0}x^2\left(e^{\frac{1}{x}}-e^{\frac{1}{x+1}}\right)$
4) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{e^x}{\mathrm{sh}x}-\dfrac{e^{-x}}{\sin x}\right)$
5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt[3]{1+x}}{\ln(1+x)}$
6) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln x}{x^2-1}$
7) $\lim\limits_{x\to 1^-}\ln(x)\ln(1-x)$
8) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\sqrt{x^2+3x+2}-x\right)$
9) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\dfrac{x}{\ln x}\right)^{\frac{\ln x}{x}}$

Exercice 19. Déterminer les valeurs des dérivées $n^{\text{ièmes}}$ en 0 de la fonction arcsin.

Exercice 20. Soit f la fonction définie pour tout $x\in]-1,0[\cup]0,+\infty[$ par

$$f(x)=\frac{1}{\ln(1+x)}-\frac{1}{x}$$

1) Déterminer le DL_2 en 0 de f.
2) En déduire que f est prolongeable par continuité en 0, qu'on notera encore f
3) Montrer que f est dérivable en 0 et donner la valeur de $f'(0)$.
4) Déterminer la position relative de f par rapport à sa tangente en 0.

Exercice 21. Donner la tangente et la position par rapport à la tangente aux points x_0 des fonctions suivantes. Est-ce qu'il y a un extremum local en x_0 ?

1) $\dfrac{1}{1+e^x}+\dfrac{x}{4}$ en $x_0=0$
2) $\dfrac{2+x+2x^2}{1+x^2}$ en $x_0=0$
3) $\dfrac{\ln x}{x-1}+\dfrac{x}{2}-\dfrac{1}{2}$ en $x_0=1$
4) $x+2\sqrt{x}-\sqrt{3+x}$ en $x_0=1$

Exercice 22. Donner une asymptote en $+\infty$ et la position par rapport à l'asymptote des fonctions suivantes :

$$f(x)=\sqrt{x(2+x)}e^{\frac{1}{x}}\qquad g(x)=\left(x^3+x^2+x+1\right)^{\frac{1}{3}}\qquad h(x)=\ln(e^{x^2}-e^x-1)\qquad \varphi(x)=\sqrt{\frac{x^4}{1+x^2}}$$

Exercice 23. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ par $f(x)=\dfrac{x\sqrt{x^2+1}}{x-1}$.

1) Donner un équivalent simple de f en 0. En déduire le signe de f au voisinage de 0 et la pente de sa tangente.
2) Donner un équivalent simple de f en 1.
3) Montrer que la courbe représentative de f admet une asymptote oblique et préciser leurs positions relatives.

La menace de l'implicite...

Exercice 24 (*DL d'une fonction réciproque*)**.** Pour tout $x\in\mathbb{R}$, on pose $f(x)=xe^{x^2}$.

1) Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$ et que sa réciproque est de classe $\mathcal{C}^\infty$.

La méthode qui suit marche bien pour de petits ordres.

2) Exprimer $(f^{-1})'$ et $(f^{-1})''$ en fonction de f^{-1} et des dérivées de f. *(on ne déterminera pas explicitement f^{-1}).*
3) En déduire le DL_2 en 0 de f^{-1}.

La méthode qui suit est plus générale. La question 4) permet de simplifier l'étude.

4) Justifier que f^{-1} admet un DL_5 en 0 et que ce DL peut s'écrire

$$f^{-1}(y)=ay+by^3+cy^5+\underset{y\to 0}{o}(y^5)$$

5) En déduire une expression du DL_5 en 0 de $f^{-1}(f(x))$ en fonction de a,b,c. Conclure.

Exercice 25 (*Équivalent d'une suite implicite*)**.** Pour $n\in\mathbb{N}$, on considère l'équation $x+\ln x=n$ d'inconnue $x\in\mathbb{R}_+^*$.

1) Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$, il existe une unique solution qu'on notera x_n. On dispose donc d'une relation « fondamentale » :

$$\boxed{x_n+\ln x_n=n}$$

2) Montrer que (x_n) est croissante, puis montrer que $x_n\to+\infty$.
3) Montrer que $\ln x_n=o(x_n)$. En déduire que $x_n\sim n$.
4) Justifier que $x_n=n+o(n)$.
5) En déduire que $x_n=n-\ln n+o(1)$. *Utiliser la question précédente et la relation fondamentale.*
6) En déduire que $x_n=n-\ln n+\dfrac{\ln n}{n}+o\left(\dfrac{\ln n}{n}\right)$. *Utiliser la question précédente et la relation fondamentale.*

Exercice 26 (*Équivalent d'une fonction implicite*)**.** Pour $\varepsilon>0$, on considère l'équation $e^{-\varepsilon x}=x$ d'inconnue $x\in\mathbb{R}_+$.

1) Montrer que pour tout $\varepsilon>0$, il existe une unique solution qu'on notera x_ε. On dispose donc d'une relation « fondamentale » :

$$\boxed{e^{-\varepsilon x_\varepsilon}=x_\varepsilon}$$

2) Montrer que $x_\varepsilon\leq 1$, et en déduire que $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}x_\varepsilon=1$.
3) Montrer que $x_\varepsilon=1-\varepsilon+\underset{\varepsilon\to 0}{o}(\varepsilon)$.
4) En déduire un DL_2 en 0 de $\varepsilon\mapsto x_\varepsilon$ *Utiliser la question précédente et la relation fondamentale.*
5) En déduire un DL_3 en 0 de $\varepsilon\mapsto x_\varepsilon$ *Utiliser la question précédente et la relation fondamentale.*